EJERCICIOS UNIDADES 1 y 2: MATRICES Y DETERMINANTES

1. **(2023-Jun-A-2)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule los valores del parámetro a para los que tanto A como B admitan inversa.

b) (1.5 puntos) Para $a=1$, halle una matriz X que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$.

2. **(2022-Jun-A-1)** Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

donde a es un número real.

a) (0.75 puntos) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

b) (0.75 puntos) Para $a=2$, calcule la matriz inversa de A.

c) (1 punto) Para $a=2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$.

3. **(2022-Jul-A-1)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

b) (1 punto) Obtenga las dimensiones de P y Q sabiendo que $A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$.

4. **(2022-R1-A-1)** Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$$

donde a es un número real. Determine de manera justificada:

a) (0.75 puntos) Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

b) (0.75 puntos) Las matrices A^2, A^3 y A^{2022} para $a=4$.

c) (1 punto) La matriz X que verifica que $X \cdot A = I_3$ para $a=3$.

5. **(2022-R3-A-1)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones y realice las que sean posibles: $C \cdot A$ $\quad A+B \quad$ $C^t \cdot B^t$

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B \cdot X + C$.

6. **(2022-R4-A-2)** Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) (1.5 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A^t - X \cdot A = 3I_3$.

b) (1 punto) ¿Existe algún valor del parámetro a para que se verifique $C^t \cdot D = B$? En caso afirmativo, calcule dicho valor.

7. **(2021-M1-A-2)** Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (0.5 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa.
b) (1.25 puntos) Para $a=3$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A - X\cdot B = C$.
c) (0.75 puntos) Para $a=3$, compruebe que $A^2 = 11\cdot A$ y exprese A^8 en función de la matriz A.

8. **(2021-M3-A-2)** Dada la ecuación matricial $(10\,I_3 - A)\cdot X = B$, donde $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y B es una matriz con tres filas y una columna.

a) (0.5 puntos) Razone qué dimensión ha de tener la matriz X.
b) (0.5 puntos) ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz B de orden 3×1? ¿Por qué?
c) (1.5 puntos) Resuelva dicha ecuación matricial si $B=\begin{pmatrix} 5 & 20 & -3 \end{pmatrix}^t$.

9. **(2021-M4-A-1)** Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (0.7 puntos) Calcule A^{40} y $\left(A^t\right)^{30}$.
b) (0.6 puntos) Calcule $\left(A^{-1}+A\right)^2$.
c) (1.2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $\left(A^t + I_2\right)\cdot X = A^t - I_2$.

10. **(2021-M6-A-2)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule A^2, A^3, A^4 y deduzca la expresión de A^n, con n un número natural.
b) (0.5 puntos) Razone si existe la inversa de la matriz B.
c) (1 punto) Razone si la ecuación matricial $B\cdot X = C$ tiene solución y resuélvela en caso de que sea posible.

11. **(2020-M1;Sept-A-1)** Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) (1 punto) Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
b) (1 punto) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?
c) (0.5 puntos) ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y la matriz A? Justifique las respuestas.

12. (2020-M2-B-1) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ a & -1 & -1\\ 3 & 0 & -2a\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

a) (0.7 puntos) Determine para qué valores de a tiene inversa la matriz A.
b) (1 punto) Para $a=2$, calcule la matriz inversa de A.
c) (0.8 puntos) Para $a=0$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A^{-1}-B\cdot B^{t}=I_3$.

13. (2020-M3;Jun-A-1) Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican $A\cdot X=B$ y $B\cdot Y=A$.

a) (1 punto) Compruebe que $Y^{-1}=X$.
b) (1.5 puntos) Para $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, halle X e Y.

14. (2020-M4-B-1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=A\cdot A^{t}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) (0.75 puntos) ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz B?
b) (0.75 puntos) Para $a=1$, calcule la inversa de la matriz B.
c) (1 punto) Para $a=1$, resuelva la ecuación matricial $B^{t}\cdot X+9C=O$.

15. (2020-M5-B-1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ k & -3 & 2\\ 1 & k & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

a) (0.8 puntos) Razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:
$$B^{t}\cdot A \qquad C\cdot B \qquad B\cdot A+B \qquad B^2$$
b) (0.7 puntos) Calcule los valores del parámetro k para los que la matriz A es invertible.
c) (1 punto) Para $k=-1$, calcule la inversa de la matriz A.

16. (2019-M1;Jun-B-1) Se considera la matriz: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

a) (0.5 puntos) Razone si la matriz A es simétrica.
b) (1 punto) Calcule A^{-1}.
c) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A-A^2-3I_3=0$.

17. (2019-M2-B-1) Se consideran las matrices:
$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}-2 & 2\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:
$$A+B\cdot C \qquad A\cdot C+B\cdot D^{t} \qquad B^2+C\cdot D \qquad A+D\cdot C$$
b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X\cdot(A+I_2)=3B^{t}$.

18. (2019-M3-B-1) Se consideran las matrices
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

a) (1.5 puntos) ¿Tiene inversa la matriz $A\cdot B-C$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $(A\cdot B-C)^{-1}$.

b) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot B\cdot X-C\cdot X=C^t$.

19. (2019-M4;Sept-A-1) Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}7 & -12 & 16\\ -1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.
2. $A\cdot A^t+B$ posee inversa.

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X+A=C$.

20. (2019-M5-B-1) Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 5\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A^4\cdot X=B^2+I_2$.

b) (0.5 puntos) ¿Tiene inversa la matriz C? Justifique la respuesta.

21. (2018-M1;Jun-B-1) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) (1.2 puntos) ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2=A^2+B^2+2A\cdot B$?

b) (1.3 puntos) Resuelve la ecuación matricial $X\cdot A=2B^t+I_2$.

22. (2018-M2-B-1) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}$.

a) (1punto) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$B+2C\cdot A \qquad A-(B\cdot C)^t$$

b) (1.5 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial: $\frac{1}{5}(B+A\cdot X)=C^t$.

23. (2018-M3-B-1) Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

a) (0.5 puntos) Razone qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A\cdot P\cdot B^t)$ y $(Q\cdot A\cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X-2B\cdot C^t=A^2$.

24. (2018-M5-A-1)

a) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$

b) (1 punto) Si A es una matriz con tres filas y dos columnas, determine razonadamente la dimensión que deben tener las matrices B, C y D para que se puedan efectuar las siguientes operaciones:

$$2A-3B \qquad A\cdot A^t-C^2 \qquad A\cdot D$$

25. (2018-M6-B-1)

a) (1.25 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones matriciales:

$$2A-5B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 7 & 8\end{pmatrix};\quad 3A-B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

b) (1.25 puntos) Dadas las matrices $C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot C-D^2=I_2$.

26. (2017-M4-B-1) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

a) (1.2 puntos) Razone cuáles de las siguientes operaciones son posibles:

$$A\cdot B^t \qquad B+3C \qquad C\cdot B^t \qquad A\cdot B+C$$

b) (1.3 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot B\cdot X=C$.

27. (2017-M5;Jun-A-1) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule la matriz A^{2017}.

b) (1.5 puntos) ¿Se verifica la expresión $(B+A)\cdot(B-A)=B^2-A^2$?

28. (2016-M1;Sept-A-1) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

a) (1.7 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A^2\cdot X+C=2B$.

b) (0.8 puntos) ¿Qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que las matrices $(B+C)\cdot P$ y $B\cdot Q\cdot C^t$ sean cuadradas?

29. (2016-M2-B-1) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & -6\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X\cdot(B\cdot B^t)=\frac{1}{2}A-2A^t$.

b) (1 punto) Razone cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse e indique, en su caso, la dimensión de la matriz resultante:

$$A\cdot B,\quad A\cdot B^t,\quad B\cdot A^{-1},\quad B^t\cdot A+A^{-1}.$$

30. (2016-M4-A-1)

a) (0.5 puntos) Si A es una matriz de dimensión $m\times n$, indique la dimensión de una matriz X si se verifica que $(A^t\cdot A)\cdot X=I_n$.

b) (1.25 puntos) Calcule dicha matriz X en el caso en que $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

c) (0.75 puntos) Calcule, si es posible, el producto $A\cdot(A^t\cdot A)$.

31. (2016-M5-A-1) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

a) (1.7 puntos) Resuelva la ecuación matricial $C \cdot B \cdot X - 2A \cdot X = A^t$.
b) (0.8 puntos) Analice cuáles de las siguientes operaciones, sin efectuarlas, se pueden realizar y justifique las respuestas: $B \cdot C + 2A$, $A \cdot C + C$, $B^t \cdot C$ y $C \cdot B - A$.

32. (2016-M6;Jun-A-1) Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1, A_2 y A_3 en dos comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}$.

Cati desea comprar 2 unidades del artículo A_1, 1 de A_2 y 3 de A_3.

Manuel desea comprar 5 unidades de A_1, 1 de A_2 y 1 de A_3.

Han dispuesto esas compras en la matriz Q: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1.8 puntos) Calcule $P \cdot Q^t$ y $Q \cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.
b) (0.7 puntos) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, ¿dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

33. (2015-M2-A-1) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (0.8 puntos) Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante:

$$A \cdot B^t \qquad C^t \cdot D \qquad B^t \cdot D \qquad D \cdot B^t$$

b) (0.5 puntos) Despeje la matriz X en la ecuación $X \cdot A^{-1} + 2B = 3C^t \cdot D$, sin calcular sus elementos.
c) (1.2 puntos) Calcule la matriz $A \cdot \left(B^t - 2D^t \cdot C\right)$.

34. (2015-M4;Jun-B-1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1.7 puntos) Calcule las matrices X e Y si $X + Y = 2A$ y $X + B = 2Y$.
b) (0.8 puntos) Analice cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D:

$$A + D = C \qquad A \cdot D = C^t \qquad D \cdot A = C \qquad D \cdot A = C^t$$

35. (2015-M5-A-1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1.25 puntos) Resuelva la ecuación $A \cdot X + B \cdot X = C$.
b) (1.25 puntos) Calcule A^4 y A^{80}.

36. (2014-M1-A-1) Sean las matrices $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -1 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

a) (0.5 puntos) Determine la dimensión que debe tener una matriz A para que se verifique la igualdad $A \cdot B = 2C^t$.
b) (2 puntos) Halle la matriz A anterior, sabiendo que de ella se conocen los elementos $a_{31} = 2,\ a_{12} = -3,\ a_{22} = 1$.

37. (2014-M4;Jun-A-1) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) (1 punto) Obtenga la matriz A^{2014}.

b) (1.5 puntos) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

38. (2014-M6;Sept-A-1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1.25 puntos) Calcule las matrices X e Y para las que se verifica

$$X + Y = A \text{ y } 3X + Y = B.$$

b) (1.25 puntos) Halle la matriz Z que verifica $B \cdot Z + B^t = 2I_2$.

39. (2013-M6;Jun-A-1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1.25 puntos) Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

b) (1.25 puntos) Para los valores $a = 3$ y $b = 1$ calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

40. (2012-M3;Sept-B-1) Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B.
En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.

a) (0.75 puntos) Para cada mes construya la matriz de dimensión 3x2 correspondiente a las compras de ese mes.

b) (0.5 puntos) Calcule la matriz de compras del trimestre.

c) (1.25 puntos) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total.

41. (2012-M5-B-1) Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.

a) (0.5 puntos) Presente en una matriz M, de dimensión 3x2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

b) (0.5 puntos) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, A (20 grandes y 30 pequeños) y B (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

c) (1.5 puntos) Calcule los productos $M \cdot A$ y $M \cdot B$ e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

42. (2012-M6-B-1) Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz F se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz G se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$F = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array}$$

a) (1 punto) Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$.
b) (0.75 puntos) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias.
c) (0.75 puntos) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

43. (2011-M3-A-1)
a) (1.5 puntos) De una matriz cuadrada, A, de orden 3 se conocen los siguientes elementos

$$a_{12} = a_{21} = -2, \quad a_{13} = a_{31} = 0, \qquad a_{23} = a_{32} = 1.$$

Determine los demás elementos de la matriz A sabiendo que debe cumplirse la ecuación

$A \cdot B = C^t$, donde $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

44. (2010-M1-B-1)
a) (1 punto) Sean A, B y C matrices con 2, 3 y 2 filas respectivamente. Sabiendo que el producto de matrices $A \cdot B \cdot C$ es posible y que el resultado es una matriz con 4 columnas, halle las dimensiones de dichas matrices.
b) (1.5 puntos) Halle la matriz X que verifica $I_2 - 2X = A \cdot \left(A - B^t\right)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

45. (2010-M3;Sept-B-1) Sean las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & b \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} c & d & 6 \\ 10 & 10 & 50 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcule, si es posible, $P \cdot Q$ y $Q \cdot P$, razonando la respuesta.
b) (1.5 puntos) ¿Cuánto deben valer las constantes a, b, c y d para que $P \cdot 2Q = R$?

46. (2008-M3;Jun-A-1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
a) (1.5 puntos) Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.
b) (1.5 puntos) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.