EJERCICIOS DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

1. **(2023-R1-B-3)**

a) (1.5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x=0$:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{-3x+7} \qquad g(x)=\ln\left(\frac{1}{3x+1}\right)$$

b) (1 punto) Calcule las integrales definidas siguientes:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{5}{3x^4}\,dx \qquad \int_{-3}^{0}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{5}\,dx$$

2. **(2023-R1-B-4)** Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-3 & si \quad x\le 1 \\ 1+\dfrac{1}{x-2} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad de f. Si la función no es continua en algún punto, indique el tipo de discontinuidad que presenta.

b) (0.75 puntos) Estudie la derivabilidad de f.

c) (0.75 puntos) Determine las asíntotas de f.

3. **(2023-R2-B-3)**

b) (1 punto) Represente gráficamente la región acotada comprendida entre la recta $y=-2x+6$ y la parábola $y=-x^2+2x+3$ y calcule su área.

4. **(2023-R3-B-3)**

a) (1.5 puntos) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+6 & si \quad x\le 2.5 \\ -1.4x+7 & si \quad x>2.5 \end{cases}$ con a y b números reales. Calcule el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua y tenga un máximo en $x=1$.

b) (1 punto) Represente gráficamente la función $g(x)=-2x^2+2x+4$ y calcule el área de la región acotada, limitada por la gráfica de dicha función y el eje de abscisas.

5. **(2023-R3-B-4)** Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & si \quad 0\le x\le 2 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad x>2 \end{cases}$

a) (1.25 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f.

b) (1.25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo de la función y represente gráficamente la función f.

6. **(2023-R4-B-3)** Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+4 & si \quad x<3 \\ -x+4 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$

a) (1.25 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en todos los puntos de su dominio.

b) (0.5 puntos) Represente gráficamente f.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=4$.

7. **(2023-Jun-B-3)** Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

a) (1 punto) Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de f y su curvatura.

b) (0.5 puntos) Represente gráficamente la función f.

c) (1 punto) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

8. **(2023-Jun-B-4)** Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función $v(t)$ nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $v(t)$ se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t)=t^2-5t+6, \qquad t\in[0,6]$$

a) (0.75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v.

b) (0.75 puntos) Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0)=10$, halle la función v.

c) (0.5 puntos) Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante $t=2$ y posteriormente las vendió en el instante $t=4$, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) (0.5 puntos) ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

9. **(2023-Jul-B-3)** El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=(x-1)^2$ y $g(x)=5-2x$ donde x está expresado en metros.

a) (1 punto) Represente gráficamente la zona deteriorada.

b) (1.5 puntos) Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿cuánto costará el plástico comprado?

10. **(2022-Jun-B-3)**

a) (1.25 puntos) Se considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(0,18)$ es -3.

b) (1.25 puntos) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $h(x)=x^3-4x^2-3x+18$ y el eje de abscisas.

11. **(2022-Jun-B-4)**

a) (1.25 puntos) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 6x-3 & si \quad x\le 1 \\ ax^2+bx+2 & si \quad x>1 \end{cases}$

con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

b) (1.25 puntos) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función $f(x)=-2x^2+8x-6$.

12. **(2022-Jul-B-3)**

a) (1 punto) Se considera la función $f(x)=x^3+bx^2+cx-1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $(-2,-3)$.

b) (1.5 puntos) Dada la función $f(x)=-x^3-x^2+x+1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

13. **(2022-R1-B-3)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} a(x+1)^2 & si \quad -3\le x\le 1 \\ \dfrac{bx^2}{2}+2 & si \quad 1<x\le 2 \end{cases}$ con a y b números reales.

a) (1.25 puntos) Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable.

b) (1.25 puntos) Para $a=1$ y $b=2$, esboce la gráfica de la función f y calcule el área del recinto limitado por gráfica de f, el eje OX y las rectas $x=-2$ y $x=1$.

14. **(2022-R2-B-4)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad x>1 \end{cases}$ con a y b números reales.

a) (1 punto) Calcule a y b para que la función f sea continua y derivable.

b) (0.75 puntos) Para $a=-1$ y $b=1$, realice un esbozo de la gráfica de la función f.

c) (0.75 puntos) Para $a=-1$ y $b=1$, halle el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f, la recta $x=1$ y el eje OX.

15. **(2022-R3-B-3)** Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 4x^2+16x+17 & si \quad x<-1 \\ \dfrac{1}{3}(10-5x) & si \quad -1\le x\le 2 \\ \dfrac{3}{2} & si \quad x>2 \end{cases}$

a) (1.25 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f.

b) (0.5 puntos) Represente gráficamente la función f.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x=-2$ y $x=2$.

16. **(2022-R3-B-4)** Se considera la función $f(x)=3x^3-6x^2+5$.

a) (1.5 puntos) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta de ecuación $y=-3x+1$.

b) (1 punto) Calcule la función F que verifique $F'(x)=f(x)$ y $F(2)=4$.

17. **(2022-R4-B-4)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$, con a y b números reales.

a) (1 punto) ¿Para qué valores de a y b la función es continua y derivable en $x=1$?

b) (0.75 puntos) Para $a=-3$ y $b=4$, calcule los extremos relativos de f.

c) (0.75 puntos) Para $a=-2$ y $b=3$, calcule el valor de la integral $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

18. **(2021-M1-B-3)** Se considera la función $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & si \quad -2\le x<0 \\ (x-1)^2 & si \quad 0\le x\le 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en todo su dominio.

b) (0.7 puntos) Calcule los extremos de la función f.

c) (0.8 puntos) Represente el recinto que encierra la gráfica de f, las rectas $x=-1$, $x=1$ y el eje OX. Calcule el área de dicho recinto.

19. (2021-M1-B-4)

a) (2 puntos) Sea f una función de la que sabemos que la gráfica de su derivada, f', es una parábola con vértice en el punto $(0, 8)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$.

1. Dibuje la gráfica de f'.
2. A partir de dicha gráfica, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, así como las abscisas de los extremos relativos de f.
3. Sabiendo que la gráfica de f pasa por el origen de coordenadas, calcule la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

20. (2021-M2;Jun-B-3) Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

a) (1 punto) Estudie su monotonía y calcule sus extremos.
b) (0.5 puntos) Represente gráficamente la función.
c) (0.5 puntos) Calcule $\int f(x)dx$.
d) (0.5 puntos) Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

21. (2021-M2;Jun-B-4)

b) (0.7 puntos) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.
c) (0.8 puntos) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = 0$.

22. (2021-M3-B-3) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -2x + 2a & si \quad -4 \le x \le -2 \\ -2x^2 - 4a & si \quad -2 < x \le 2 \\ -8x + b & si \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$

a) (1 punto) Calcule los valores a y b para que la función sea continua en su dominio. Para esos valores, ¿es f derivable?
b) (0.8 puntos) Para $a = -2$ y $b = 16$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos y absolutos.
c) (0.7 puntos) Para $a = -2$ y $b = 16$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

23. (2021-M3-B-4)

b) (1.5 puntos) Halle la función $h(x)$, sabiendo que su derivada es $h'(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ y que $h(2) = \dfrac{11}{3}$.

24. (2021-M4-B-3) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x \le -1 \\ -3x^2 + 4 & si \quad -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en todo su dominio.
b) (0.8 puntos) Represente gráficamente la función f.
c) (0.7 puntos) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

25. **(2021-M4-B-4)** Una fábrica estima que sus costes de producción, expresados en miles de euros, vienen dados por la función $f(x)=x^2-6x+10$, donde x es la cantidad semanal a producir expresada en miles de kilogramos.

a) (1 punto) ¿Cuál debe ser la producción semanal para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es dicho coste?

b) (1.5 puntos) Calcule la recta tangente a la función de costes en el punto de abscisa $x=4$. Represente gráficamente la función de costes y la recta tangente hallada.

26. **(2021-M5;Jul-B-3)** Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & si \quad x<0 \\ x^2-2x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) (0.8 puntos) Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

c) (0.7 puntos) Calcule $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

27. **(2021-M6-B-4)** La cotización en bolsa de una empresa en un determinado día viene expresada, en euros, por la función $c(t)$, con $t\in[0,\,24]$, medido en horas.

La variación instantánea de esta función es la derivada de c, que viene dada por $c'(t)=0.03t^2-0.9t+6$, con $t\in(0,\,24)$.

a) (1.25 puntos) Estudie los intervalos en los que la función c es creciente.

b) (0.5 puntos) Analice los puntos críticos de la función c. Indicando en cuáles se alcanza el máximo y el mínimo relativos.

c) (0.75 puntos) Halle la expresión analítica de la función c, sabiendo que la cotización en bolsa de la empresa era de 50 euros en el instante inicial.

28. **(2020-M2-A-2)**

a) (1.2 puntos) Se considera la función $f(x)=ax^2+bx+3$. Calcule los valores a y b, sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,\,3)$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto es $m=-2$.

b) (1.3 puntos) Represente gráficamente la función $g(x)=-x^2+6x-5$ y calcule el área comprendida entre la gráfica de la función g, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=4$.

29. **(2020-M2-B-2)** Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{1-x} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Estudie la monotonía y curvatura de f en su dominio.

c) (0.5 puntos) Calcule las ecuaciones de las asíntotas de f.

30. **(2020-M3-A-2)** Se considera la función $f(x)=ax^3+bx+4$, con a y b números reales.

a) (1 punto) Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2,\,36)$.

b) (0.75 puntos) Para $a=4$ y $b=-3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.

c) (0.75 puntos) Para $a=4$ y $b=-3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x)=f(x)$ y $F(2)=10$.

31. **(2020-M3-B-2)**

b) (1.3 puntos) Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x)=-x^2+2x+3$ y el eje de abscisas.

32. (2020-M4-A-2)

b) (1.3 puntos) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones $h(x)=x^2+1$ y $p(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, en el punto de abscisa $x=1$. ¿En qué punto se cortan ambas rectas?

33. (2020-M4-B-2) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax+\frac{1}{2} & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{x+1}{x+3} & si \quad -1<x\le 1 \\ x^2-bx & si \quad x>1 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Halle a y b para que la función sea continua en todo su dominio. Para esos valores de a y b, ¿es derivable en $x=-1$? ¿Y en $x=1$?

b) (0.5 puntos) Para $a=-1$ y $b=4$, estudie la monotonía de la función f.

c) (0.5 puntos) Para $a=-1$ y $b=4$, calcule $\int_1^2 f(x)dx$.

34. (2020-M5-A-2) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) (1.2 puntos) Halle a y b para que f sea continua y derivable en $x=0$.

b) (0.7 puntos) Para $a=1$ y $b=-2$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

c) (0.6 puntos) Para $a=1$ y $b=1$, halle, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de f.

35. (2020-M5-B-2) El número de bacterias en un determinado cultivo viene dado por la función $B(t)$, donde t representa el tiempo en horas, con $0\le t\le 7$. La variación instantánea en la población de bacterias en el cultivo viene dada por la derivada de la función B, cuya expresión es $B'(t)=50000\cdot e^{2t}$.

a) (0.75 puntos) ¿Existe algún instante t en el que el número de bacterias en el cultivo comience a decrecer?

b) (1.5 puntos) Obtenga la expresión de la función $B(t)$, sabiendo que en el instante $t=0$ el número de bacterias en el cultivo era de 40000.

c) (0.25 puntos) ¿Cuál es el número de bacterias en el cultivo a la hora y media?

36. (2020-M6-A-2) De una función f sabemos que su gráfica pasa por el punto $(1,3)$ y que su derivada es $f'(x)=2x-6$.

a) (0.75 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

b) (1 punto) Estudie la monotonía y la existencia de extremos de la función f.

c) (0.75 puntos) Determine la función f y represéntela gráficamente.

37. (2020-M6-B-2) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & si \quad x<-2 \\ x^2+a & si \quad x\ge -2 \end{cases}$

a) (1 punto) Calcule el valor de a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, ¿es derivable la función f?

b) (0.5 puntos) Para $a=-6$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

c) (1 punto) Para $a=-6$, esboce la gráfica de f y calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=5$.

38. **(2019-M1;Jun-A-2)** Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.

a) (1 punto) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) (1 punto) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) (0.5 puntos) Calcule $\int f(x)dx$.

39. **(2019-M3-A-2)** Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) (0.8 puntos) Halle a y b de forma que f tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ tenga pendiente $m = -1$.

b) (1.7 puntos) Para $a = -1$ y $b = -1$, estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

40. **(2019-M4;Sept-B-2)** De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

b) (0.75 puntos) Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.

c) (0.75 puntos) Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1, 3)$.

41. **(2019-M6-A-2)** Se considera la función $f(x) = x - \dfrac{3x-1}{x+1}$.

a) (1 punto) Indique el dominio de f y calcule $f'(x)$.

b) (0.5 puntos) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{2}{3}$.

c) (1 punto) Halle los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a dicha gráfica es horizontal.

42. **(2018-M3-B-2)** Se considera la función $f(x) = \dfrac{ax}{bx+1}$, con a y b números reales.

a) (1.5 puntos) Calcule los valores de a y b, sabiendo que $f(-1) = 1$ y que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y = 2x + 1$.

b) (1 punto) Para $a = b = 1$, halle la ecuación de sus asíntotas.

43. **(2007-M2;Jun-B-2)**

a) (2 puntos) Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto $(1,5)$ sea la recta $y = 3x + 2$.