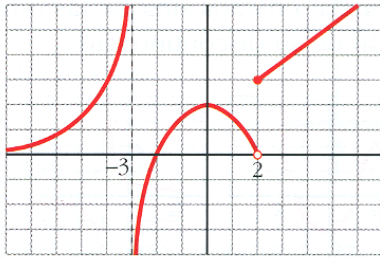


UNIDAD 8: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

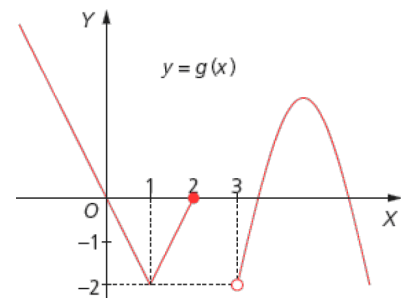
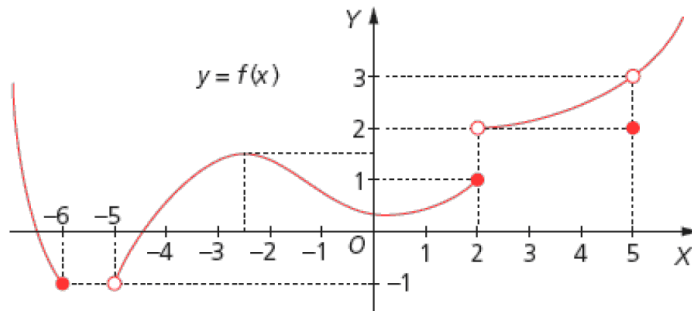
1. Dada la gráfica de la función:



Calcula:

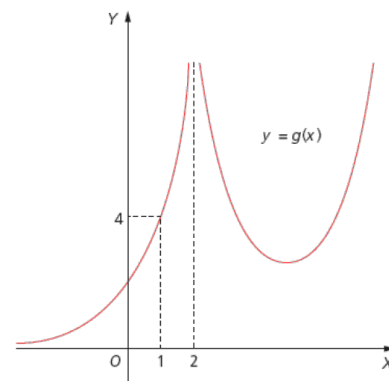
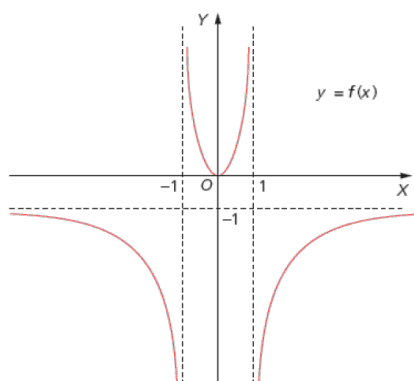
- | | | |
|-------------------------------------|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | g) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ |

2. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:



- | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $f(2)$ | e) $f(5)$ | i) $f(-5)$ | m) $\lim_{x \rightarrow 2.5} f(x)$ | p) $g(2)$ | t) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$ | j) $f(-6)$ | n) $g(1)$ | q) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ | u) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ | k) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$ | ñ) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ | r) $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ | v) $g(3)$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ | h) $\lim_{x \rightarrow 2.5^+} f(x)$ | l) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ | o) $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ | s) $g(2.5)$ | |

3. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:



- | | | | |
|--|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ | h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ | l) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ | i) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ | m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ | n) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ |

d) Ecuaciones de las asíntotas de f .

k) Ecuaciones de las asíntotas de g .

4. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6) \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)^7 \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 + x + 1) \quad d) \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x^2 + x + 1)$$

5. Calcula los siguientes límites de funciones:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x + 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 1}{x + 1} \quad d) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 1}{x + 1} \quad e) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

6. Calcula los siguientes límites laterales:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1 - x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x - 20}{3 - x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{x - 2}$$

7. Calcula los siguientes límites de funciones racionales si existen. En caso necesario halla los límites laterales:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x - 3} \quad d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x + 1} \quad e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{(x + 1)^2}$$

8. Calcula los siguientes límites de funciones:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3x} \quad g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 1} \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{2x^3 + 3x^2 + 2x} \quad i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{5x^2 - 7x - 6} \quad j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 3x^3}{x^3 + x^2}$$

9. Calcula los siguientes límites de funciones racionales si existen. En caso necesario halla los límites laterales:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} \quad b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9}$$

10. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x + 25) \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 + 1) \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

11. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1) \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x + 7) \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 10) \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 + 10)$$

12. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 7x + 3}{-x^2 + 2x + 5} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{7x + 5} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 3}{x^2 + 7x + 1} \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{2x + 5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^3 - 2x + 8}{5x^2 + x + 1} \quad f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 3}{x^2 + 3x + 2} \quad g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^4 + 1}{2x^3 + 1} \quad h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 1}{7x^5 + 1}$$

13. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x + 1}} \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3} \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} \quad e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} \quad g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{7 - x}}{4 - \sqrt{13 + x}} \quad h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} \quad i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}$$

14. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + x} - \sqrt{x}) \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2})$$

15. Halla los siguientes límites de funciones:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+7}{x-3} \cdot \frac{x+5}{4x-3} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x-7}{x-3} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+5}{x^2+3} \right)$$

16. Calcula los siguientes límites de funciones:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x-3}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+7} \right)^{2x-3}$$

17. Considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ 5x-2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad g) \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad e) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \quad h) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad f) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

18. Calcula las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

$$b) f(x) = \frac{7x^2+2}{x^2-2x}$$

$$c) f(x) = \frac{5x-2}{2x-7}$$

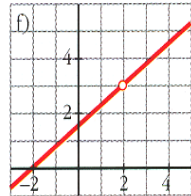
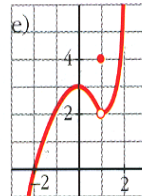
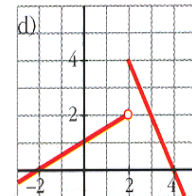
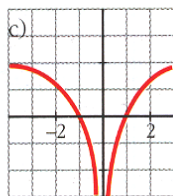
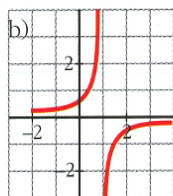
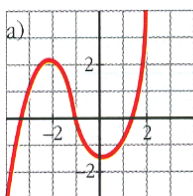
19. Calcula la asíntota oblicua de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$$

$$c) f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$$

20. Determina cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua. Indica, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad y clasifícala.



21. Estudia el dominio de las siguientes funciones, su continuidad y clasifica sus posibles discontinuidades. Representálas.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 3 \\ -x+10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 3 \\ -x+10 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \\ -x+10 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

22. Estudia el dominio de las siguientes funciones, su continuidad y clasifica sus posibles discontinuidades.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x \leq 3 \\ 5-x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} -6-2x & \text{si } -5 < x \leq -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ -4 & \text{si } 2 < x \leq 6 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

23. Determina los valores de los parámetros a y b para que sean continuas las funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

24. Comprueba si las siguientes funciones pueden ser continuas en los puntos que se indican:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 9}{5x^2 - 13x - 6} \quad \text{en } x = 3 \quad b) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} \quad \text{en } x = 2$$

25. Un estudio biológico establece que el número de animales de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función:

$$f(t) = \frac{15000t + 10000}{2t + 2} \quad (t \text{ son años transcurridos})$$

Halla:

- El tamaño actual de la población.
 - Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Si es así, ¿en qué número de individuos?
26. Una fotocopidora es capaz de fotocopiar 50 páginas por minuto, por término medio, cuando es nueva, pero con el paso de los años disminuye el número de fotocopias que hace según la función:

$$N(t) = \begin{cases} 50 - 1.5t & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ \frac{12t + 172}{t + 1} & \text{si } t > 4 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de esta función.
 - ¿Cuántas fotocopias por minuto, por término medio, es capaz de hacer cuando comienza a funcionar? ¿Y al cabo de un año? ¿Y el sexto año de funcionamiento?
 - Por muy antigua que sea la fotocopidora, ¿Cuántas fotocopias por minuto, por término medio podrá hacer?
27. Las siguientes funciones muestran los ingresos y los gastos, respectivamente, en miles de euros, de una empresa en función del tiempo t , en años, desde que abrió sus puertas.

$$I(t) = \frac{75t + 800}{2t^2 + 8} \quad G(t) = \frac{15t + 100}{2t^2 + 8}$$

- Halla la función que muestre los beneficios de esta empresa.
 - ¿Qué pasa con los beneficios cuando el tiempo se hace infinitamente grande?
28. Hacemos un estudio sobre la evolución del número de individuos, en miles, de una especie protegida de águila, durante los próximos años, y obtenemos la función:

$$A(t) = \frac{16t + 12}{2t + 3} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo en años.}$$

- ¿Cuántas águilas hay en este momento? ¿Cómo se prevé que va a evolucionar la población de águilas entre los años 8 y 12?
- Suponiendo que esta función continuara siendo válida a lo largo del tiempo, ¿se estabilizará la población de águila real? ¿En cuántos animales?