UNIDAD 9: DERIVADAS Y APLICACIONES

1. Halla la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=5x$
2) $f(x)=7x^2$
3) $f(x)=4x^6$
4) $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$
5) $f(x)=\frac{3}{7}x^4-\frac{11}{3}x^3+\frac{6}{8}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$
6) $f(x)=\sqrt{x}$
7) $f(x)=\sqrt[7]{x}$
8) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$
9) $f(x)=2(x^2+7x-3)^5$
10) $f(x)=e^{-x}$
11) $f(x)=e^{x^2+5x-6}$
12) $f(x)=3^{x^2+5}$
13) $f(x)=\sqrt{e^x}$
14) $f(x)=e^{x^2}+x^2$
15) $f(x)=e^{x^2}(x^3+11x)$
16) $f(x)=\frac{e^x}{2x-5}$
17) $f(x)=\frac{3x-7}{2x-1}$
18) $f(x)=\frac{5}{x}$
19) $f(x)=\ln x^3$
20) $f(x)=\ln(x^2+5x-1)$
21) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$
22) $f(x)=x\cdot\ln x$
23) $f(x)=e^x\cdot\ln x$
24) $f(x)=(2x-7)(3x-5)$
25) $f(x)=\sqrt{\ln x}$
26) $f(x)=sen(x^2+3)$
27) $f(x)=\frac{x}{sen\ x}$
28) $f(x)=2\cos 7x$
29) $f(x)=(\cos x)^2$
30) $f(x)=(tg\ x)^2$
31) $f(x)=tg\ x^2$
32) $f(x)=e^{3x^2}+senx$

2. Halla la derivada de las siguientes funciones:

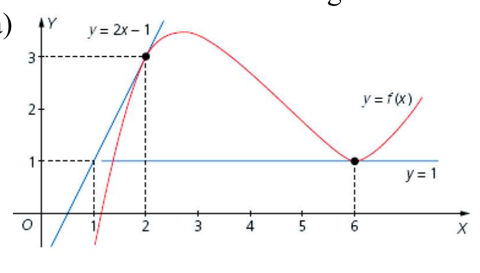
a) $f(x)=(3x+1)^3\cdot\ln(x^2+1)$
b) $f(x)=\frac{e^x}{7x^5-4}$
c) $f(x)=(x^3+1)\cdot e^{7x}$
d) $f(x)=3^x\cdot\ln x$
e) $f(x)=(x^2+1)\cdot(x^5-6x)^6$
f) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2-2}$
g) $f(x)=\frac{3}{(2x-5)^2}+\ln(1-x)$
h) $f(x)=\frac{e^x}{x^3+1}$
i) $f(x)=2x\cdot e^{3x-1}$
j) $f(x)=e^{1-x}+\ln(x+2)$
k) $f(x)=\frac{1-3x}{x}+(5x-2)^3$
l) $f(x)=(x^2+2)\cdot\ln(x^2+2)$
m) $f(x)=3^{5x}+e^x$
n) $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$
ñ) $f(x)=(1-x^3)\cdot\cos x$
o) $f(x)=4x^3-5x+\frac{1}{e^x}$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva:

a) $f(x)=x^2-5x+6$ en el punto de abscisa $x=2$.
b) $f(x)=-x^2+2x+5$ en el punto de abscisa $x=-1$.
c) $f(x)=x^2+4x+1$ cuya pendiente sea igual a 2.
d) $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ en el punto de abscisa $x=1$.
e) $f(x)=\sqrt{x+1}$ en el punto de abscisa $x=0$.
f) $f(x)=x^2-6x+5$ que sea paralela a la recta $y=2x+8$.
g) $f(x)=\ln x$ que sea paralela a la recta $y=3x-2$.

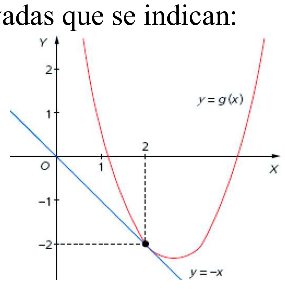
4. Calcula en cada una de las siguientes funciones las derivadas que se indican:

a)



$f'(2)$
$f'(6)$

b)



$g'(2)$

5. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)=x^3-3x$ que sean paralelas a la recta $6x-y+10=0$.

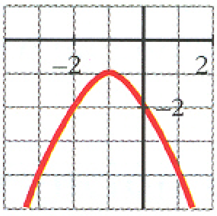
6. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)=x^3-3x$ que sean paralelas a la recta de tangente horizontal de la función $g(x)=x^3-3x^2-9x-1$.

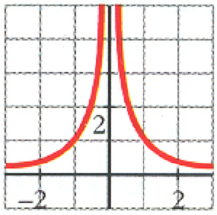
7. Halla las ecuaciones de las tangentes a la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ en los puntos en que corta a los ejes.

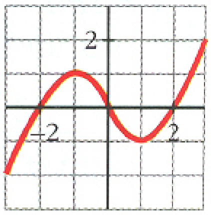
8. Estudia la monotonía (los intervalos de crecimiento y decrecimiento) de la función indicada. Estudia también sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

$a)\, f(x)=x^3-6x^2+9x+4$ $\qquad b)\, f(x)=3x^3-18x+1$

9. Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y el los que f' es negativa. ¿En qué puntos la derivada es cero?

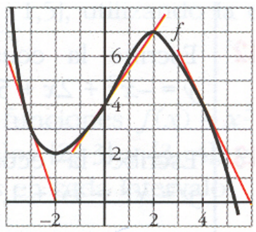
a)


b)


c)


10. La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$ es $4x-3y+1=0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

11. Indica los puntos de la gráfica en los que la derivada es cero. En $x=-3,\ x=0$ y $x=4$ ¿la derivada es positiva o negativa? Razona tus respuestas.



12. Estudia la curvatura (intervalos de convexidad y concavidad) de la función indicada. Estudia también sus puntos de inflexión.

$a)\, f(x)=x^4-6x^2$ $\qquad b)\, f(x)=x^3$ $\qquad c)\, f(x)=e^x$ $\qquad d)\, f(x)=3x^2-4x+1$

13. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Calcula a, b y c sabiendo que su gráfica pasa por el punto $A(0,0)$, que tiene un máximo relativo en $x=-1$ y un mínimo relativo en $x=1$.

14. Sea la función $f(x)=x^2+ax+b$. Calcula a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $A(3,0)$ y que la recta tangente a la gráfica en ese punto es paralela a la recta $y=2x+5$.

15. Determina p y q para que la gráfica de $f(x)=x^2+px+q$ pase por $A(-2,1)$ y tenga un mínimo relativo en $x=-3$.

16. Halla a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(2,-15)$.

17. Dada la función $f(x)=ax^3+3x^2-5x+b$, obtén los valores de a y b para que la gráfica de f pase por $A(1,-3)$ y tenga un punto de inflexión en $x=-1$.

18. Representa, aproximadamente, cada una de las siguientes funciones a partir del estudio de su monotonía, extremos relativos, curvatura, puntos de inflexión y puntos de corte con los ejes.

$a)\, f(x)=x^3-3x^2$ $\qquad b)\, f(x)=x^3-3x+2$ $\qquad c)\, f(x)=x^4+4x^3$

$d)\, f(x)=x^3-9x^2+24x-20$ $\qquad e)\, f(x)=12x-x^3$

19. La producción de fresas en un invernadero depende de la temperatura T, en ºC, del mismo según muestra la función:

$$P(T)=-T^3+27T^2+120T+60 \quad (P(T) \text{ en Kg.})$$

Determina a qué temperatura se conseguirá la máxima producción de fresas en el invernadero.

20. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{3x}\cdot\ln(2x-5)$ b) $g(x)=\dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$ c) $h(x)=(3x^2+5x-1)^6+x^2-\ln x$

21. El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$, para $0\le t\le 12$, donde t representa el tiempo.

a) ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuántas toneladas se consumen en ese momento?
b) ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?
c) Represente gráficamente la función.

22. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$.

a) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x=-1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-2$.
b) Para $a=6$ y $b=9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

23. Responde a estas cuestiones:

a) Calcule los valores de los parámetros a y b para que la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ presente un extremo relativo en el punto $(2,6)$.
b) Para $a=1$ y $b=1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x=1$.

24. Sea la función $f(x)=x^3-9x^2+8$.

a) Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

25. Sea la función $g(x)=x^3+ax^2+b$. Calcule a y b sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto $(2,5)$.

26. En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km^2, viene dada por la función $f(t)=\dfrac{11t+20}{t+2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla?
b) Estudie si la mancha crece o decrece con el tiempo.
c) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?

27. Responde a estas cuestiones:

a) Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=ax^2-b$ en el punto $(1,5)$ sea la recta $y=3x+2$.
b) Para $g(x)=e^{1-x}+Ln(x+2)$, calcule $g'(1)$.

28. Responde estas cuestiones:

a) De una función f se sabe que la gráfica de su función derivada, f', es la recta de ecuación $y=-2x+4$. Estudie razonadamente la monotonía de f, a la vista de la gráfica de la derivada.
b) Dada la función $g(x)=\dfrac{4x-4}{x+4}$, calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=0$.

29. El índice de audiencia de un canal de TV durante la retransmisión de un partido de tenis viene dado por $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo x el tiempo en minutos desde el comienzo del partido. Sabiendo que al inicio el índice de audiencia fue de 6 puntos y que a los 30 minutos se alcanzó el índice mínimo de audiencia que además fue de 3 puntos, determine el valor de las constantes a, b y c.

30. El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por $C(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$, en función de la hora x, siendo $11 \leq x \leq 20$.

a) Estudie su monotonía y halle los extremos relativos de esta función.

b) Estudie además su curvatura y calcule el punto de inflexión de C.

c) Calcule el número medio de clientes que visitan el hipermercado a las 11h y a las 20h. Represente la función con todos los datos obtenidos y comente la gráfica.

31. El número de personas ingresadas en un hospital por causa de la gripe A después de t semanas viene dado por la función:

$$C(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} \qquad t \geq 0$$

a) Calcula el número máximo de personas ingresadas y la semana en que tuvo lugar.

b) ¿Tiende a estabilizarse el número de personas ingresadas con el paso del tiempo? ¿a qué valor? Razona la respuesta en términos matemáticos.

32. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \;\; x < 1 \\ x^2 + x & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

b) ¿Cuál es su función derivada?

33. Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} \ln(x - 1) & si \;\; x < 2 \\ 3x - 6 & si \;\; x \geq 2 \end{cases}$ es continua pero no derivable en $x = 2$.

Obtén su función derivada.

34. Estudiar la continuidad y derivabilidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \;\; x \leq 0 \\ 1 & si \;\; 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & si \;\; x \geq 3 \end{cases}$$

35. Calcula los valores de m y n sabiendo que la siguiente función es derivable en $\Re$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & si \;\; x \leq 1 \\ -x^2 + nx & si \;\; x > 1 \end{cases}$$